Монголын оюутны математикийн олимпиад-2017

1-ийн даваа, 1-р курс

Бодох хугацаа: 180 минут, бодлого бүр 7 оноотой

1. $\sqrt[3]{\cos x} < \dfrac{\sin x}{x} \quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ тэнцэтгэл бишийг батал.

Бодолт: $f(x) = \sin^2 x \tan x - x^3 > 0 \quad \left(\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$ гэж батлахад хангалттай.

$$f'(x) = 2\sin^2 x + \tan^2 x - 3x^2$$

$$f''(x) = 2\sin 2x + 2\tan x + 2\tan^3 x - 6x$$

$$f'''(x) = 2(3 + 4\cos^2 x)\tan^4 x > 0 \Rightarrow$$

f'' функц өснө. Иймд

$$\inf_{0<x<\frac{\pi}{2}} f''(x) = \lim_{x\to 0} f''(x) = 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

f' функц өснө. Иймд

$$\inf_{0<x<\frac{\pi}{2}} f'(x) = \lim_{x\to 0} f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

f өснө. Иймд

$$\inf_{0<x<\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) > 0 \qquad \square$$

2. 3 хавтгайн тэгшитгэлээр үүсэх шугаман тэгшитгэлийн системийн үндсэн матрицын ранг r, өргөтгөсөн матрицын ранг R бол өгсөн хавтгайнуудыг шүргэх бөмбөрцөгийн төвийн геометрийн байрыг ол. Үүнд: a) $r = 2, R = 3$ b) $r = 1, R = 2$

Бодолт: Уг тэгшитгэлийн системийн геометр утгыг аналитик геометрээс санавал уг шугаман тэгшитгэлийн систем:

a_1) гурвалжин суурьтай төгсгөлгүй шулуун призм a_2) 2 параллель хавтгайг гуравдугаар хавтгайгаар (уг 2-той параллель биш) огтолсон огторгуйн мужууд.

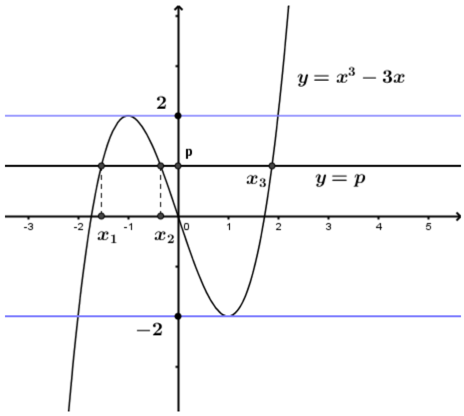
b) 2 параллель хавтгай зэргийг дүрслэнэ.

Иймд a_1) уг шулуун гурвалжин призмд багтсан бөмбөрцгүүдийн төвүүд нэг шулуун(призмийн ирмэгтэй параллель) дээр оршино.a_2) уг 2 параллель хавтгайн хооронд орших 2 төгсгөлгүй биетэд багтах бөмбөрцгийн төвүүд 2 параллель шулуун (хавтгайнуудын огтлолын шулуунтай параллель) дээр оршино. b) уг 2 параллель хавтгайн хооронд аль алинаас нь ижил зайнд орших уг 2 хавтгайтай параллель хавтгай байна.

3. p тогтмол тоо үед $x^3 - 3x - p = 0$ куб тэгшитгэлийн бодит язгууруудын хамгийн их болон хамгийн бага утгуудын үржвэрийг $f(p)$ гэе. (Нэг бодит язгууртай бол түүний квадрат нь $f(p)$

болно.) Тэгвэл: a) $\forall p \in \mathbb{R}$-ийн хувьд $f(p)$-ийн минимум утгыг ол. b) $f(p)$ функцийн графикийг байгуул.

Бодолт: a) $y = g(x) = x^3 - 3x$, $y = p$ графикуудын огтлолын тоог тогтооё.



$g_{(-1)} = g_{(2)} = 2, g_{(1)} = g_{(-2)} = -2$ байна. Тиймээс

$$\begin{cases} |p| > 2 \ \text{үед} \ x^3 - 3x - p = 0 \ \text{тэгшитгэл} \ 1 \ \text{шийдтэй, тэр нь модулиараа 2-оос их} \\ |p| < 2 \ \text{үед} \ x^3 - 3x - p = 0 \ \text{тэгшитгэл} \ 3 \ \text{шийдтэй} \\ |p| = 2 \ \text{үед} \ x^3 - 3x - p = 0 \ \text{тэгшитгэл} \ 2 \ \text{шийдтэй байна.} \end{cases}$$

$|p| > 2$ үед бодит шийд нь k байг. $\Rightarrow k^3 - 3k = p$ ба $k \geq 2$ байна. Иймд

$$x^3 - 3x - p = (x - k)(x^2 + kx + (k^2 - 3)) \ \text{ба} \ f_{(p)} = k^2 \text{болно.}$$

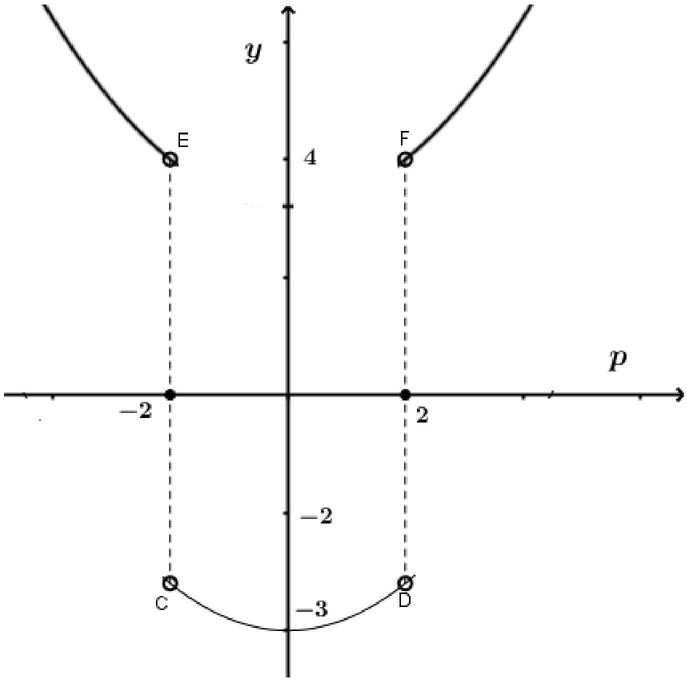
$|p| \geq 2$ үед шийдүүдийг $x_1 \leq x_2 = k \leq x_3$ гэе. Энд $-2 \leq x_1 \leq k \leq x_3 \leq 2$ байна.

$$x^3 - 3x - p = (x - k)(x^2 + kx + (k^2 - 3)) \Rightarrow x_1 \cdot x_3 = k^2 - 3 \ \text{болно.}$$

Иймд $f_{(p)} = \begin{cases} k^2, \ \ |p| > 2, \ \ p = k^3 - 3k \\ k^2 - 3 \ \ |p| \leq 2, \ \ k^3 - 3k = p, \ \ \dfrac{-k - \sqrt{12 - 3k^2}}{2} \leq k \leq \dfrac{-k + \sqrt{12 - 3k^2}}{2} \end{cases}$ болно.

($f_{(p)}$ функц зөв тодорхойлогдохыг шалга.) Иймд $f_{\min} = f_{(0)} = -3$ байна.

б) $y = f_{(p)}$ графикийг шинжлэн байгуулвал:

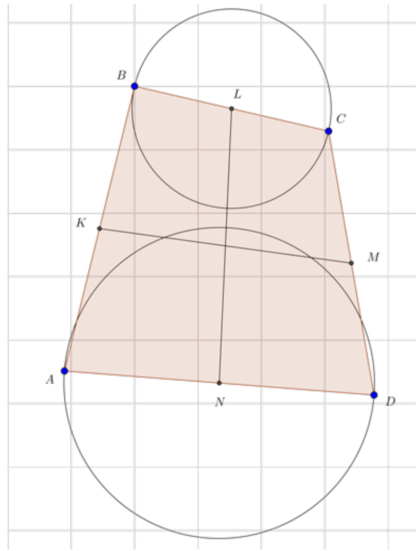


4. Гүдгэр 4 өнцөгтийн талууд дээр тухайн талыг диаметрээ болгосон дугуй байгуулъя. Эдгээр 4 дугуйнаас хоорондоо үл огтлолцох хос хамгийн ихдээ 1 олдохыг батал.

Бодолт: Талаар диаметрээ болгосон дугуйг "тал дээр суусан дугуй" гэе. Эсрэгээс нь $ABCD$ дөрвөн өнцөгтийн суусан дугуйнууд дотор нь үл огтлолцох ядаж 2 хос олддог гэе. Хөрш талууд (ерөнхий оройтой талууд) дээр суусан дугуйнууд ерөнхий цэгтэй учир үл огтлолцох хос болж чадахгүй. Иймд $ABCD$-ийн дугуйнууд доторх үл огтлолцох хосын тоо 2-оос хэтрэхгүй. Үл огтлолцох хосын тоог ядаж 2 гэсэн учир, ийм хос яг 2 олдоно; эсрэг талууд дээр суусан дугуйнууд хос хосоороо үл огтлолцоно. Талуудын дундаж цэгүүдийг M, N, K, L гэвэл манай үл огтлолцох нөхцөл

(AB, CD)-ийн хувьд: $r_{AB} + r_{CD} = \dfrac{|AB|}{2} + \dfrac{|CD|}{2} < |KM|$

(BC, AD)-ийн хувьд: $r_{BC} + r_{AD} = \dfrac{|AD|}{2} + \dfrac{|BC|}{2} < |LN|$ болно. Ямар ч 4 өнцөгтийн хувьд эсрэг талуудын дунджуудыг холбосон хэрчмийн урт үлдсэн хоёр талын уртуудын нийлбэрийн хагаас хэтэрдэггүй. Үүнээс $|KM| \leq \dfrac{(|AD| + |BC|)}{2}$ ба $|LN| \leq \dfrac{(|AB| + |CD|)}{2}$ гэж гарна. Иймээс харшлалд хүрэв.



Монголын оюутны математикийн олимпиад-2017

1-ийн даваа, 2-р курс

1. $y^2 = 2px$ параболын $A,\ B,\ C$ цэгүүд дээр шүргэсэн шүргэгчид KLM гурвалжныг үүсгэнэ. KLM гурвалжны талбай S бол ABC гурвалжны талбайг ол.

Бодолт: $y^2 = 2px$ параболын $A\left(\frac{a^2}{2p}, a\right); B\left(\frac{b^2}{2p}, b\right); C\left(\frac{c^2}{2p}, c\right)$ цэгүүдэд татсан шүргэгч шулуунуудын тэгшитгэлүүд нь харгалзан
$x = \frac{a}{p}y - \frac{a^2}{2p}, x = \frac{b}{p}y - \frac{b^2}{2p}, x = \frac{c}{p}y - \frac{c^2}{2p}$ байна.
Эдгээр шүргэгчүүдийн огтлолын цэгүүдийг олвол

$$L\left(\frac{ab}{2p}, \frac{a+b}{2}\right); \quad K\left(\frac{ac}{2p}, \frac{a+c}{2}\right) \quad L\left(\frac{bc}{2p}, \frac{b+c}{2}\right)$$

болно. Одоо $\triangle ABC$ ба $\triangle LKM$ гурвалжнуудын талбайг олвол

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \frac{b^2}{2p} - \frac{a^2}{2p} & b-a \\ \frac{c^2}{2p} - \frac{a^2}{2p} & c-a \end{matrix}\right\| = \frac{1}{4p}|(b-a)(c-a)(b-c)|;$$

$$S_{LKM} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \frac{ac}{2p} - \frac{ab}{2p} & \frac{a+c}{2} - \frac{a+b}{2} \\ \frac{bc}{2p} - \frac{ab}{2p} & \frac{b+c}{2} - \frac{a+b}{2} \end{matrix}\right\| = \frac{1}{8p}|(b-a)(c-a)(b-c)|;$$

Иймд $S_{ABC} = 2S_{LKM} = 2S$ гэж гарна.

2. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = |x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4|$ фунцийн $\{x \in \mathbb{R}^4 : |x_k| \le 1, k \in \overline{1,4}\}$ нэгж куб дээрх хамгийн их утгыг ол.

Бодолт:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,x_3,x_4) =& |x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4| \\
=& |x_1(x_3+x_4) + x_2(x_3-x_4)| \\
\leq& |x_1||x_3+x_4| + |x_2||x_3-x_4| \\
\leq& |x_3+x_4| + |x_3-x_4| \\
\leq& 2\max\{|x_3|,|x_4|\} = 2
\end{aligned}
$$

3. f нь $[a,b]$ хэрчим дээр интегралчлагддаг функц байг. Хэрэв $m = \inf\limits_{a\leq x\leq b} f(x) > 0$, $M = \sup\limits_{a\leq x\leq b} f(x)$ бол

$$
(b-a)^2 \leq \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \leq (b-a)^2 \frac{(m+M)^2}{4mM}
$$

гэж батал.

Бодолт:

$$
\begin{aligned}
(b-a)^2 &= \left(\int_a^b \sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2 \\
&\leq \int_a^b f(x)dx \int_a^b \frac{dx}{f(x)} \\
&\leq \frac{M}{4m}\left(\frac{1}{M}\int_a^b f(x)dx + m\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right)^2 \\
&= \frac{M}{4m}\left(\int_a^b \left(\frac{f(x)}{M} + \frac{m}{f(x)}\right)dx\right)^2 \\
&\leq \frac{M}{4m}\left(\int_a^b \left(1+\frac{m}{M}\right)dx\right)^2 \\
&= \frac{(M+m)^2}{4mM}(b-a)^2.
\end{aligned}
$$

4. (a) $\forall\, n$ натурал тооны хувьд

$$
\sin n\theta = p_n(\tan\theta)\cos^n\theta, \qquad \cos n\theta = q_n(\tan\theta)\cos^n\theta
$$

байх p_n ба q_n олон гишүүнтүүд оршин байхыг батал.

(b) $n > 1$ үед

$p_n'(x) = nq_{n-1}(x)$,

$q_n'(x) = -np_{n-1}(x)$ адилтгалууд биелэхийг батал.

Бодолт: $\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = (1+i\tan\theta)^n\cdot\cos^n\theta$ Эндээс,

$$
q_n(x) = \frac{1}{2}\left[(1+ix)^n + (1-ix)^n\right]
$$

$$
p_n(x) = \frac{1}{2i}\left[(1+ix)^n - (1-ix)^n\right]
$$

болох ба q_n, p_n нь бодит коэффициентүүдтэй олон гишүүнтүүд гэдэг нь ойлгомжтой.

$$q_n'(x) = \frac{in}{2}\left[(1+ix)^{n-1} - (1-ix)^{n-1}\right] = -np_{n-1}(x)$$

$$p_n'(x) = \frac{n}{2}\left[(1+ix)^{n-1} + (1-ix)^{n-1}\right] = nq_{n-1}(x).$$

Монголын оюутны математикийн олимпиад-2017

1-ийн даваа, 3,4-р курс

1. $(1;+\infty)$ завсарт тасралтгүй

$$\int_x^{x^2} f(t)dt = 1 \quad (\forall x \in (1;+\infty))$$

байх $f(x)$ функц олдох уу?

Бодолт: f тасралтгүй учир

$$(*)\int_x^{x^2} f(t)dt = 1$$

тэнцлийн 2 тал нь дифференциалчлагдах функц байна. 2 талаас нь уламжлал авбал

$$2xf(x^2) - f(x) = 0 \Rightarrow (**) \quad 2\varphi(x^2) = \varphi(x) \quad \forall x \in]1;+\infty[$$

болно. Энд $\varphi(x) = xf(x)$ юм. (**) тэгшитгэлийг $\varphi(x) = \dfrac{c}{\ln x}$ функцууд хангах нь илт. Иймд $f(x) = \dfrac{c}{x\ln x}$ болно. Үүнийг (*)-д орлуулбал $f(x) = \dfrac{1}{x\ln 2\ln x}$ болно. Өөрөөр хэлбэл: (*) тэгшитгэлийг хангах функц оршин байна.

Санамж: Өөр шийд байгаа эсэхийг судална уу?

2. 2-р эрэмбийн матрицан алгебр $M_2(\mathbb{R})$ дээр

$$\left[[x,y]^2, z\right] = 0$$

адилтгал биелэхийг харуул. Энд $[x,y] = xy - yx$.

Бодолт: $x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ бодит 2-р эрэмбийн матрицууд байг.

$$xy = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}, \ yx = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix},$$

$$[x,y] = \begin{pmatrix} a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} - b_{11}a_{12} - b_{12}a_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} - b_{21}a_{11} - b_{22}a_{21} & a_{21}b_{12} - b_{21}a_{12} \end{pmatrix}$$

$a_{12}b_{21} - b_{12}a_{21} = m, \quad a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} - b_{11}a_{12} - b_{12}a_{22} = n, \quad a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} - b_{21}a_{11} - b_{22}a_{21} = p$ гэвэл $[x,y] = \begin{pmatrix} m & n \\ p & -m \end{pmatrix}$,

$$[x,y]^2 = \begin{pmatrix} m & n \\ p & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & n \\ p & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2+np & mn-mn \\ mp-mp & np+m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m^2+np & 0 \\ 0 & np+m^2 \end{pmatrix}$$

Эндээс $[x,y]^2$ матриц нь дурын 2-р эрэмбийн матрицтай байр солих нь илэрхий.

Энэ бодолт нь Э.Оргил-Эрдэний бодолт юм.

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & a^2 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$ байг.

   (a) A матрицын хувийн векторууд p, q, r-г ол.

   (b) $x_{n+1} = A \cdot x_n + u, n \geq 0$ дарааллын хувьд $x_n = \alpha_n p + \beta_n q + \gamma_n r$ байх $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ дарааллуудыг ол.

   (c) x_n-г a -аар илэрхийл.

Бодолт: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & a & a^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A - \lambda E = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1 + a^2$ гарна.

$Ax = \lambda x$ тэгшитгэл бодвол $p = (0, -a, 1)^T, q = (1, 0, 0)^T, r = (0, 1, a)^T$ байна.

Энд $(x, y, z)^T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

b) $x_n = \alpha_n p + \beta_n q + \gamma_n r$ байг.

$$u = -\frac{a}{1+a^2}p - q + \frac{1}{1+a^2}r, \quad x_0 = \frac{1}{1+a^2}p + \frac{a}{1+a^2}r$$

байхыг тооцвол

$$\alpha_0 = \frac{1}{1+a^2}, \beta_0 = 0, \gamma_0 = \frac{a}{1+a^2} \quad \text{ба} \quad n \geq 1 \quad \text{үед}$$

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}p + \beta_{n+1}q + \gamma_{n+1}r =& x_{n+1} = A \cdot x_n + u \\ =& \lambda_1 \cdot \alpha_n \cdot p + \lambda_2 \cdot \beta_n \cdot q + \lambda_3 \cdot \gamma_n \cdot r + u \\ =& -\frac{a}{1+a^2} \cdot p + (\beta_n - 1)q + \left((1+a^2) \cdot \gamma_n + \frac{1}{1+a^2}\right) \cdot r \end{aligned}$$

болно. Иймд $\alpha_{n+1} = -\dfrac{a}{1+a^2}$

$\beta_{n+1} = \beta_n - 1 = (\beta_{n-1}) - 1 = \ldots = \beta_0 - (n+1) = -n - 1,$

$\gamma_{n+1} = (1+a^2) \cdot \gamma_n + \dfrac{1}{1+a^2} = \dfrac{(a^3+1)(1+a^2)^{n+1} - 1}{(1+a^2)a^2}$

c) нь б)-ээс $x_n = -\dfrac{a}{1+a^2} \cdot p - n \cdot q + \dfrac{(a^3+1)(1+a^2)^n - 1}{(1+a^2)a^2} r$ болно.

4. Дугуй ширээ тойрон суусан n хүнээс хөрш 2 хүн агуулаагүй k хүн сонгох боломжын тоог ол.

Бодолт:

Лемм 1. *Эгнэн суусан n хүнээс хөрш 2 хүн агуулаагүй k хүн сонгох боломжийн тоо* C^k_{n-k+1}.

Хүмүүсээ $1, 2, \ldots, n$ хүртэл дугаарлая. Тэгвэл $(1, 2, \ldots, n) \longrightarrow (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ гэсэн дугаартай хүмүүсийг сонгон авсан гэе.

$\begin{cases} i_2 - 2 \geq i_1 \\ i_3 - 2 \geq i_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_k - 2 \geq i_{k-1} \end{cases}$ нөхцөл биелж байх ёстой. Эндээс $\begin{cases} i_2 - 1 > i_1 \\ i_3 - 2 > i_2 - 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_k - k + 1 > i_{k-1} - (k-2) \end{cases}$ нөхцөл биелэх нь тодорхой. $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \longrightarrow (i_1, i_2 - 1, i_3 - 2, \ldots i_k - k + 1)$ буулгалт ХНУ буулгалт байна. Иймд $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$-г сонгох боломжийн тоо $(1, 2, \ldots, n - k + 1)$-ээс k ялгаатай элемент сонгох боломжийн тоотой тэнцүү. Эндээс C^k_{n-k+1} болох нь батлагдав.

Одоо тойрон суусан n хүмүүсээ $1 - n$ хүртэл дугаарлая. 1-р хүнийг сонгосон байх үед эхлээд тооцъё. Энэ үед 2 болон n-р хүмүүс сонгогдохгүй. Тиймээс $3, 4, \ldots, n-1$ хүмүүсээс $k-1$ хүн сонгох ба энэ үед эгнүүлэн суусантай яг адилхан байх учир Лемм 1-ээс боломжийн тоо $C^{k-1}_{n-3-k+2} = C^{k-1}_{n-k-1}$ байна. Одоо 1-р хүнийг сонгоогүй үед бодъё. Тэгвэл $2, 3, \ldots, n$ хүнээс k хүн сонгох ба 1-р хүн сонгоодоогүй учир эгнэн суусан $n-1$ хүнтэй адилхан болно. Иймд Лемм 1 ёсоор $C^k_{n-1-k+1} = C^k_{n-k}$ байна. Эндээс нийт боломж

$$\begin{aligned} C^k_{n-k-1} + C^k_{n-k} &= \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} + \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} \\ &= \frac{k \cdot (n-k-1)!}{k!(n-2k)!} + \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} \\ &= \frac{(n-k)! \cdot n}{k!(n-2k)! \cdot (n-k)} \\ &= \frac{n}{n-k} \cdot C^k_{n-k} \end{aligned}$$

байна.