

## I курс

1.  $a_n, b_n, n \geq 1$  нь эерэг бодит тоон дараалал болог. Хэрэв  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^n = \alpha$  бөгөөд  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^n = \beta$  бол

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n + b_n}{2} \right)^n$$

хязгаарыг ол.

2.  $\text{tr} A = a, \det A = b$  байх  $A$  гэсэн  $2 \times 2$  хэмжээтэй цор ганц матриц олддог байх бүх  $a, b \in \mathbb{R}$  тоонуудыг ол.

3. Огторгуйн тэгш өнцөгт координатын бүхэл тоон цэг бүр дээр станц оршино. Станц бүр өөрөөсөө яг  $\sqrt{2014}$  нэгж зайд орших станцтай холбоо барьж чадна. Тэгвэл координатын эхээс дамжсан мэдээ бүх станцад хүрэх боломжтой юу? [ $3^2 + 22^2 + 39^2 = 2014!$ ]

4.  $1, 2, \dots, 100$  тоонууд өгчээ. Ялгавар нь 2 эсвэл 3 байх хос олдохгүй байхаар хамгийн ихдээ хэдэн тоо уг тоонуудаас сонгон авч болох вэ?

## II курс

1.  $E(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j + \sum_{i=1}^n x_i$  байг.

$$\min_{x_i \in \mathbb{R}, i=1, n} E(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

утгыг ол.

2. Гол диагональ дээрх тоонууд нь сондгой, бусад нь тэгш байх  $n \times n$  матрицын тодорхойлогчыг тэг биш гэж батал.

3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16n^2 + 20n + 7}{(4n + 2)!}$$

цувааны нийлбэрийг ол.

4.  $n, m \in \mathbb{N}$  тоонуудын хувьд  $f(n, m)$  нь  $x_1 + \dots + x_n \leq m$  тэнцэл бишийн сөрөг биш бүхэл шийдүүдийн тоо байг. Тэгвэл  $f(n, m) = f(m, n)$  гэж батал. [Тайлбар: Шийд нь тэнцэл бишийн нөхцлийг хангах сөрөг биш  $x_i, 1 \leq i \leq n$  тоонуудын эрэмбэлэгдсэн дараалал юм.]

### III-IV курс

1.  $2 \times 2$  хэмжээт бодит тоон талбар дээрх  $A$  матриц өгөгдөв. Тэгвэл  $A^0, A^1, A^2, \dots, A^n$  матрицуудаар төрөгдсөн вектор огторгуйн хэмжээсийг ол.

2.  $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$  ба  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  функц хоёр удаа дифференциалчлагдах бөгөөд  $f'(a) = f'(b) = 0$  байвал  $f''(c) = \lambda f(c)f'(c)$  байхаар  $c \in (a, b)$  цэг олдоно гэж батал.

3. 8 элементтэй  $\mathbb{F}_8$  талбар дээрх  $y^2 + y = x^7 + x^3$  тэгшитгэлийн шийдийн тоог ол.

4.  $H$  нь  $\mathbb{K}$  талбар дээрх гильберт огторгуй ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  юмуу  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ),  $a \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$  өгсөн элемент,  $L = \{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$  бол  $\forall x \in \mathbb{H}$  элементийн хувьд  $\rho(x, L^\perp)$  -ийг ол. (энд  $\rho$  нь нормоор төрөгдсөн метрик)